Pénalisation de la marche aléatoire standard par une fonction du maximum unilatère, du temps local en zéro et de la longueur des excursions.

Pierre Debs

PÉNALISATION DE LA MARCHE ALÉATOIRE STANDARD par une fonction du maximum unilatère, du temps local en zéro et de la longueur des excursions

Pierre Debs

Institut Élie Cartan Nancy, B.P. 239,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
Pierre.Debs@iecn.u-nancy.fr

Actual version : 9 mars 2007

Résumé

Soit Ω l'ensemble des fonctions ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, telles que $\phi(n+1) = \phi(n) \pm 1$, $(X_n, n \geq 0)$ le processus des coordonnées de Ω, $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ sa filtration naturelle, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ et $(\mathbb{P}_x, x \in \mathbb{Z})$ la famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que sous $\mathbb{P}_x$, $(X_n, n \geq 0)$ soit la marche aléatoire standard issue de x, i.e. que $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) = \frac{1}{2}$ si $j = i \pm 1$. Soit $G : \mathbb{N} \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle positive et adaptée. Pour plusieurs types de fonctionnelles G, nous montrons que, pour tout n fixé et $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, la quantité :

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} G_p]}{\mathbb{E}_x[G_p]}$$

admet une limite quand p tend vers l'infini et que cette limite est de la forme $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^x]$ où $(M_n^x, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ martingale positive. Ceci permet de définir sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ la probabilité Q_x par la formule :

$$Q_x(\Lambda_n) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^x] \quad (\Lambda_n \in \mathcal{F}_n)$$

On décrit alors de manière précise le processus $(\Omega, X_n, n \geq 0, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ sous la probabilité Q_x.
On va étudier ici trois situations :
.G_p est une fonction du maximum unilatère.
.G_p est une fonction de X^-, X^+ et de son "temps local en 0".
.G_p est une fonction de la longueur des excursions de X.
qui constituent les trois sections de cet article.

1 INTRODUCTION

B. Roynette, P. Vallois et M. Yor (cf [RVY II]) ont étudié le problème suivant :
soit $\left\{\Omega, (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}_x\right\}$ le mouvement brownien canonique de dimension 1. Ω est l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(X_t, t \geq 0)$ est le processus des coordonnées, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$, et $\mathbb{P}_x$ est la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que $\mathbb{P}_x\left(X_0 = x\right) = 1$.
On considère $\Gamma : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle positive. Pour plusieurs types de fonctionnelles Γ, ces auteurs montrent que, pour tout s fixé et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$,la quantité :

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s} \Gamma_t]}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]}$$

admet une limite quand t tend vers l'infini et que cette limite est de la forme, $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s} M_s^x]$ où $(M_s^x, s \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ martingale positive. Ceci permet de définir sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ la probabilité Q_x par la formule :

$$Q_x(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s} M_s^x] \quad (\Lambda_s \in \mathcal{F}_s)$$

Ils ont alors décrit de manière précise le processus $(\Omega, X_s, s \geq 0, \mathcal{F}_s, s \geq 0)$ sous la probabilité Q_x. Cette étude a été réalisée pour de nombreuses fonctionnelles Γ, par exemple une fonction du maximum unilatère, une fonction du temps local, de la longueur des excursions ou encore de l'âge du processus (cf. [RVY II], [RVY VII]).
Dans ce travail, on se propose de donner une version discrète du résultat précédent. Plus précisément, soit Ω

l'ensemble des fonctions ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, telles que $\phi(n+1) = \phi(n) \pm 1$, $(X_n, n \geq 0)$ le processus des coordonnées de cet espace, $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle associée, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ et $\mathbb{P}_x$ $(x \in \mathbb{N})$ la famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que sous $\mathbb{P}_x$, $X = (X_n, n \geq 0)$ soit la marche aléatoire standard issue de x. Lorsque x n'est pas indiqué, on considère, pour alléger les notations, que la marche est issue de 0. Soit $G : \mathbb{N} \times \Omega \to \mathbb{N}$ une fonctionnelle adaptée et positive. Le but de ce travail est de montrer que pour plusieurs types de fonctionnelles G :

i) Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} G_p]}{\mathbb{E}_x[G_p]}, \tag{1.1}$$

admet une limite quand p tend vers l'infini.

ii) Cette limite est égale à $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^x]$, où $(M_n^x, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ martingale positive telle que $M_0^x = 1$. Cette limite, que l'on note $Q_x(\Lambda_n)$ induit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Lambda_n \in \mathcal{F}_n,\ Q_x(\Lambda_n) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^x\right]. \tag{1.2}$$

On étudie ensuite le processus $(X_n, n \geq 0, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ sous Q_x.

Pour simplifier les calculs, on suppose que la marche est issue de 0.

1) Dans une première partie, on considère une fonction du maximum unilatère, i.e. :

$$G_p = \varphi(S_p)$$

où $S_p = \sup\{X_k, k \leq p\}$ et où φ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) = 1$$

et on définit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$$

Nous obtenons :

Théorème 1.1. *1)i) Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, on a :*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \varphi(S_p)]}{\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^\varphi] \tag{1.3}$$

où $M_n^\varphi := \varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n)$.

ii) $(M_n^\varphi, n \geq 0)$ est une martingale positive, non uniformément intégrable : en fait, elle tend vers 0 p.s. lorsque $n \to \infty$.

2) Soit Q^φ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, \quad Q^\varphi(\Lambda_n) = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^\varphi] \tag{1.4}$$

Alors sous Q^φ, on a :

i) S_∞ est fini p.s. et vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Q^\varphi(S_\infty = k) = \varphi(k). \tag{1.5}$$

ii) Soit $T_\infty := \inf\{n \geq 0, X_n = S_\infty\}$; sous Q^φ, T_∞ est fini presque sûrement et :

a) $(X_n, n \leq T_\infty)$ et $((S_\infty - X_{n+T_\infty}, n \geq 0)$ sont deux processus indépendants.

b) Sachant que $\{S_\infty = k\}$, $(X_n, n \leq T_k)$ est une marche aléatoire standard stoppée lorsqu'elle atteint le niveau k.

c) $((S_\infty - X_{T_\infty+n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3 issue de 0, notée $(R_n, n \geq 0)$, indépendante de (S_∞, T_∞).

3) Soit $R_n = 2S_n - X_n$. Alors sous Q^φ, $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3.

Les démonstrations des deuxième et troisième partie de ce résultat reposent en grande partie sur un Théorème de Pitman (cf. [P]) ainsi que sur l'étude de la quantité $\mathbb{P}(\Lambda_n | S_p = k)$ lorsque p tend vers l'infini, où Λ_n est un élément de $\mathcal{F}_n$.

Dans cet article, deux chaînes de Markov jouent un rôle particulier. La marche de Bessel de dimension 3 et la

marche de Bessel* de dimension 3. On peut remarquer qu'elles sont identiques si on décale l'une d'un pas.
La marche de Bessel de dimension 3 est la chaîne de Markov $(R_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les probabilités de passage sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{n+1} = 1 \mid R_n = 0) &= 1 \\ \mathbb{P}(R_{n+1} = x+1 \mid R_n = x) &= \frac{x+2}{2x+2}, \text{ pour } x \geq 1 \\ \mathbb{P}(R_{n+1} = x-1 \mid R_n = x) &= \frac{x}{2x+2}, \text{ pour } x \geq 1 \end{aligned}$$

Nous désignons par $(\mathcal{R}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle de la marche de Bessel.

Nous appelons marche de Bessel* de dimension 3, la chaîne de Markov $(\tilde{R}_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie par les probabilités de passage suivantes :
.$\mathbb{P}_0(\tilde{R}_1 = 1) = 1$
.Si $x \geq 1$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x+1 \mid \tilde{R}_n = x) &= \frac{1}{2}\frac{x+1}{x} \\ \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x-1 \mid \tilde{R}_n = x) &= \frac{1}{2}\frac{x-1}{x} \end{cases}$$

On peut remarquer que ces deux marches sont très proches : il suffit de décaler l'une des marches d'un pas pour obtenir l'autre :

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x+1 \mid \tilde{R}_n = x) = \mathbb{P}(R_{n+1} = x+2 \mid R_n = x+1) \tag{1.6}$$
$$\mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x-1 \mid \tilde{R}_n = x) = \mathbb{P}(R_{n+1} = x \mid R_n = x+1) \tag{1.7}$$

2) Dans une deuxième partie, la fonctionnelle G_p est une fonction du "temps local" en 0 de la marche aléatoire, c'est à dire que :

$$G_p := h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p>0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p<0}$$

avec, pour tout a réel :

$$a^+ = 0 \vee a,\ a^- = -(0 \wedge a)\,.$$

et où h^+ et h^- sont deux fonctions définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^+(k) + h^-(k)) = 1$$

De plus, on pose :

$$H(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x}(h^+(k) + h^-(k))$$

Nous appellons ici le processus du temps local en 0, noté $(L_n, n \geq 0)$, le processus défini par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} L_0 &= 0 \\ L_{n+1} &= L_n + \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=1} + \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=-1} = L_n + \mathbb{1}_{X_n=0} \quad si \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 0$, L_n est la somme du nombre de montés de 0 à 1 et du nombre de descentes de 0 à -1 avant n. Nous obtenons :

Théorème 1.2. *1)i) Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, on a :*

$$lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p>0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p<0})]}{\mathbb{E}[h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p>0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p<0}]} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n}M_n^{h^+,h^-}] \tag{1.8}$$

où $M_n^{h^+,h^-} := X_n^+h^+(L_n) + X_n^-h^-(L_n) + 1 - H(L_n)$.
ii) $M_n^{h^+,h^-}$ est une martingale positive, non uniformément intégrable : en fait, elle tend vers 0 p.s. lorsque n

tend vers l'infini.
2) Soit la probabilité $Q_0^{h^+,h^-}$ *induite par :*

$$\forall n \geq 0,\ \Lambda_n \in \mathcal{F}_n,\ Q_0^{h^+,h^-}(\Lambda_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^{h^+,h^-}] \tag{1.9}$$

Sous $Q_0^{h^+,h^-}$ *on a les propriétés suivantes :*
i) L_∞ *est finie p.s. et vérifie :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Q\left(L_\infty = k\right) = \frac{1}{2}(h^+(k) + h^-(k)) \tag{1.10}$$

ii) Soit $g := sup\left\{n \geq 0, X_n = 0\right\}$*. Alors* g *est finie* $Q_0^{h^+,h^-}$ *p.s. et :*
a) Les processus $(X_{g+u}, u \geq 0)$ *et* $(X_u, u \leq g)$ *sont indépendants.*
b) Avec probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^+(k))$*, le processus* $(X_{g+u}, u \geq 1)$ *est une marche de Bessel* de dimension 3 partant de 1.*
Avec probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^-(k))$*, le processus* $(-X_{g+u}, u \geq 1)$ *est une marche de Bessel* de dimension 3 partant de 1.*
c) Sachant $L_\infty = l$*, le processus* $(X_u, u \leq g+1)$ *est une marche aléatoire standard arrêtée lorsque son temps local en 0 atteint le niveau* l*.*

Ce qui a motivé le choix de cette définition du temps local en 0 de la marche aléatoire plutot qu'une autre se justifie dans la preuve du premier point. En effet, il est important que ce temps local possède une propriété de symétrie. La deuxième partie de la preuve de ce Théorème, repose essentiellement sur un article de Le Gall (cf [LG]) qui nous permet d'affirmer, sous des conditions que l'on précisera plus loin, qu'une marche de Bessel* de dimension 3 sous $\mathbb{P}$ est encore une marche de Bessel* sous $Q_0^{h^+,h^-}$.

3) Dans notre troisième partie, G_p est une fonction de la plus grande excursion avant g_p. Soit x un entier pair positif, fixé et :

$$G_p := \mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x}$$

avec $g_n := \sup\left\{k \leq n, X_k = 0\right\}$ et $d_n := \inf\left\{k \geq n, X_k = 0\right\}$, et :

$$\Sigma_n := \sup\left\{d_k - g_k, d_k \leq n\right\}$$

Pour $n \geq 0$, Σ_n est la longueur de la plus grande excursion avant g_n.
Soit $A_n := n - g_n$. Le processus $(A_n, n \geq 0)$ est le processus de l'âge (des excursions) et soit $A_n^* := \sup\limits_{k \leq n} A_k$.
Dans ce qui suit, $\tilde{T}_0$ est une copie de T_0, indépendante de $\mathcal{F}_n$, $\gamma_n := \sum_{k=0}^{n}\mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$ est le nombre de visites en 0 avant n, $\tau = \inf\left\{n > T_0, X_n = 0\right\}$ le premier retour en 0. Pour plus de clarté, dans ce qui suit nous notons :

$$\mathbb{E}\left[|X_x| \mid \tau > x\right] = \theta(x) \tag{1.11}$$

Nous obtenons :

Théorème 1.3. *1)i) Pour tout* $n \geq 0$ *et tout* $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ *:*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x}]}{\mathbb{P}_0[\Sigma_p \leq x]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n] \tag{1.12}$$

Alors :

$$M_n := \left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x}$$

2) Soit la probabilité Q^x *induite par :*

$$\forall n \geq 0, \forall \Lambda_n \in \mathcal{F}_n,\ Q^x\left(\Lambda_n\right) := \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n\right] \tag{1.13}$$

Alors sous Q^x*, on a :*
i) $\Sigma_\infty \leq x$ *p.s. et vérifie pour tout* $y \leq x$ *:*

$$Q^x\left(\Sigma_\infty > y\right) = 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)} \tag{1.14}$$

ii) $A^*_\infty = \infty$ *p.s.*
iii) Soit $g := \sup\{n \geq 0, X_n = 0\}$ *Alors* $Q^x(0 < g < \infty) = 1$ *et :*

$$Q^x(g \leq p) = \left(\frac{1}{2}\right)^l \sum_{k=1}^{p\wedge x} C_{2l-2k}^{l-k} C_{2k}^{k} \left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right) \tag{1.15}$$

iv) Soit y *tel que* $0 \leq y \leq x$. *Alors :*
a) la loi de $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ *est la même sous* $\mathbb{P}$ *et sous* Q^x.
b) $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ *et* $X_{T_y^A}$ *sont indépendants sous* $\mathbb{P}$ *et sous* Q^x.
c) La loi sous Q^x *de* $X_{T_y^A}$ *est donnée par :*

$$Q^x\left(X_{T_y^A} = k\right) = \left\{\frac{|k|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_k\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mathbb{P}(X_y = k \mid \tau > y) \tag{1.16}$$

d)

$$Q^x\left(g > T_y^A\right) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > x)} \tag{1.17}$$

e) Sous Q^x, $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ *est indépendant de* $\left\{g > T_y^A\right\}$.
3) Sous Q^x *:*
i) Les processus $(X_n, n \leq g)$ *et* $(X_{g+n}, n \geq 0)$ *sont indépendants.*
ii) Avec probabilité $\frac{1}{2}$, *le processus* $(X_{g+n}, n \geq 0)$ *est une marche de Bessel* de dimension 3 et avec probabilité* $\frac{1}{2}$, *le processus* $(-X_{g+n}, n \geq 0)$ *est une marche de Bessel* de dimension 3.*
iii) Conditionnellement à $\gamma_\infty = l$, *le processus* $(X_n, n \leq g)$ *est une marche aléatoire standard arrêtée à sa* l^{ieme} *visite en 0 et conditionnée à* $\Sigma_{\tau_l} \leq x$ *où* τ_l *est le temps de la* l^{ieme} *visite en 0.*

La démonstration du premier point du Théorème 1.3 repose en grande partie sur un Théorème Taubérien (cf. [F1], pp. 442-448) qui permet d'obtenir un équivalent lorsque p tend vers l'infini de $\mathbb{P}(\Sigma_p \leq x)$. Quant à l'étude du processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^x, cette dernière repose sur des arguments similaires à ceux utilisés dans le Théorème précédent.

2 Pénalisation par une fonction du maximum unilatère : Démonstration du Théorème 1.1

1) Commençons par faire quelques rappels :
Le résultat suivant est classique (cf. [F1] pp.75) :

Lemme 2.1. $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\mathbb{P}_0(X_n = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^{\frac{n+x}{2}} \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. *Dans tout ce qui suit, on note :*

$$\mathbb{P}_0(X_n = x) := p_{n,x} \tag{2.2}$$

et nous remarquons que $p_{n,x}$ *est non nulle si et seulement si* n *et* x *sont de même parité et* $|x| \leq n$.

Lemme 2.3. *Soit* $k \leq n$. *La probabilité qu'un chemin de* n *pas issu de* $O = (0,0)$ *arrive au point* $A = (n,k)$ *et ait un maximum supérieur ou égal à* r *est égale à :*

$$\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) = \mathbb{P}_0(X_n = 2r - k) = p_{n,2r-k}, \quad |2r - k| \leq n \tag{2.3}$$

Démonstration du lemme 2.3. Grâce au principe de réflexion de Désiré André (voir par exemple [F1] pp.72 et pp.88-89), il est aisé de voir que le nombre de chemins qui partent de 0, qui arrivent en k à l'instant n et qui ont leur maximum supérieur à r, est égal au nombre de chemins qui partent de 0 et qui arrivent en $2r - k$ à l'instant n. De ce fait :

$$\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) = p_{n,2r-k} \tag{2.4}$$

□

Lemme 2.4. *Soient n, r deux entiers. On a :*

$$\mathbb{P}_0(S_n = r) = p_{n,r} \vee p_{n,r+1} \tag{2.5}$$

Démonstration du lemme 2.4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(S_n = r, X_n = k) &= \mathbb{P}_0(S_n \geq r, X_n = k) - \mathbb{P}_0(S_n \geq r+1, X_n = k) \\
&= \mathbb{P}_0(X_n = 2r-k) - \mathbb{P}_0(X_n = 2r+2-k), \text{ d'après (2.3)} \\
&= p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}
\end{aligned}$$

Si $S_n = r$, X_n ne peut être inférieur à $r - n$. Ainsi :.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(S_n = r) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}_0(S_n = r, X_n = k) \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} \mathbb{P}_0(S_n = r, X_n = k) \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k} \\
&= (p_{n,2r-(r-n)} - p_{n,2r+2-(r-n)}) + (p_{n,2r-(r-n+1)} - p_{n,2r+2-(r-n+1)}) \\
&+ (p_{n,2r-(r-n+2)} - p_{n,2r+2-(r-n+2)}) + (p_{n,2r-(r-n+3)} - p_{n,2r+2-(r-n+3)}) \\
&+ \ldots \\
&+ (p_{n,2r-(r-2)} - p_{n,2r+2-(r-2)}) + (p_{n,2r-(r-1)} - p_{n,2r+2-(r-1)}) \\
&+ p_{n,2r-r} - p_{n,2+2-r} \\
&= (p_{n,r+n} - p_{n,r+2+n}) + (p_{n,r+n-1} - p_{n,r+1+n}) + (p_{n,r+n-2} - p_{n,r+n}) \\
&+ (p_{n,r+n-3} - p_{n,r+n-1}) + \ldots + (p_{n,r+2} - p_{n,r+4}) + (p_{n,r+1} - p_{n,r+3}) + (p_{n,r} - p_{n,r+2})
\end{aligned}$$

Cette somme est télescopique et donc :

$$\mathbb{P}_0(S_n = r) = p_{n,r} + p_{n,r+1} = p_{n,r} \vee p_{n,r+1} \text{ , d'après la Remarque 2.2.} \tag{2.6}$$

□

2.i) Montrons le point 1.i du Théorème 1.1.
Nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 2.5. *Soit la marche aléatoire standard $(\widetilde{X}_p, p \geq 0)$ issue de 0, définie par $(\widetilde{X}_u = X_{u+n} - X_n, u \geq 0)$ et soit $(\widetilde{S}_p, p \geq 0)$ le processus du maximum unilatère de cette marche.*
Alors pour tout $n \geq 0$, $p \geq n$, $k \in \mathbb{N}$, et $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(\Lambda_n \mid S_p = k) &= \frac{\mathbb{P}(S_n = k)}{\mathbb{P}(S_p = k)} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{P}(k - X_n > \widetilde{S}_{p-n}) \mid S_n = k] \qquad (2.7) \\
&+ \frac{1}{\mathbb{P}(S_p = k)} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{S_n \leq k} \mathbb{P}(k - X_n = \widetilde{S}_{p-n})] \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 2.5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \{S_p = k\}\right) &= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{S_n \vee \left(\sup_{n\leq u\leq p} X_u\right) = k\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{S_n \vee \left(X_n + \sup_{n\leq u\leq p} \tilde{X}_u\right) = k\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{S_n \vee \left(X_n + \tilde{S}_{p-n}\right) = k\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{\left\{S_n > X_n + \tilde{S}_{p-n}, S_n = k\right\} \cup \left\{\tilde{S}_{p-n} + X_n \geq S_n, \tilde{S}_p - n = k - X_n\right\}\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, k - X_n > \tilde{S}_{p-n}, S_n = k\right) + \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, S_n \leq k, \tilde{S}_{p-n} = k - X_n\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(S_n = k\right) \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, k - X_n > \tilde{S}_{p-n} \mid S_n = k\right) \\
&+ \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, S_n \leq k, \tilde{S}_{p-n} = k - X_n\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(S_n = k\right) \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{P}\left(k - X_n > \tilde{S}_{p-n}\right) \mid S_n = k\right] \\
&+ \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n, S_n \leq k} \mathbb{P}_0\left(\tilde{S}_{p-n} = k - X_n\right)\right]
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 2.6. *Pour tout $k \geq 0$:*

$$\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

Démonstration du lemme 2.6. Cette démonstration résulte de la formule de Stirling appliquée à la formule (2.5) en faisant attention à la parité de n et k. $\square$

Grâce à ces deux Lemmes on peut prouver la Proposition suivante :

Proposition 2.7. *i) Pour tout $n \geq 0$, tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ et tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(\Lambda_n \mid S_p = k)$ admet une limite lorsque p tend vers l'infini. Notons $Q^{(k)}(\Lambda_n)$ cette limite. Elle vaut :*

$$Q^{(k)}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(k - X_n) \mid S_n = k] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{S_n\leq k}] \tag{2.10}$$

ii) (2.10) induit une probabilité $Q^{(k)}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ et on a :

$$Q^{(k)}(S_\infty = k) = 1 \tag{2.11}$$

Démonstration de la Proposition 2.7. Prouvons i). D'après le lemme 2.6 :

$$\mathbb{P}(\widetilde{S}_{p-n} = k - X_n) \quad \underset{p\to\infty}{\sim} \quad \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

$$\mathbb{P}(\widetilde{S}_{p-n} < k - X_n) \quad \underset{p\to\infty}{\sim} \quad (k - X_n)\left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n \mid S_p = k) &= \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{\mathbb{P}(S_n = k)}{\mathbb{P}(S_p = k)}\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{P}(k - X_n > \tilde{S}_{p-n}) \mid S_n = k]\right\} \\
&+ \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{1}{\mathbb{P}(S_p = k)}\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{S_n\leq k}\mathbb{P}(\tilde{S}_{p-n} = k - X_n)]\right\} \\
&= \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(k - X_n) \mid S_n = k] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{S_n\leq k}] \\
&= Q^{(k)}(\Lambda_n)
\end{aligned}$$

Montrons ii). Soient $a < k < b$:

$$\begin{aligned}
Q^{(k)}(S_\infty \notin]a,b[) &= Q^{(k)}(\exists n \geq 0 \text{ tel que } \forall m \geq n, S_m \notin]a,b[) \\
&= Q^{(k)}\left(\bigcup_{n\geq 0}\{\forall m \geq n, S_m \notin]a,b[\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} Q^{(k)}\left(S_n \notin]a,b[\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n\notin]a,b[}(k - X_n) \mid S_n = k\right] \\
&+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n\notin]a,b[}\mathbb{1}_{S_n\leq k}\right]
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n\notin]a,b[}(k - X_n) \mid S_n = k\right] = 0$$

et comme :

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \mathbb{P}_0 \text{ p.s.}$$

on a :

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n\notin]a,b[}\mathbb{1}_{S_n\leq k}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi :

$$Q^{(k)}(S_\infty = k) = 1$$

$\square$

Lemme 2.8. *Soient $x \geq 0$, $x \geq y$. Alors :*

$$\mathbb{E}_0\left[\varphi(x \vee (y + S_n))\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \{(x - y)\varphi(x) + 1 - \phi(x)\} \tag{2.14}$$

Démonstration du lemme 2.8. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0\left[\varphi(x \vee (y+S_n))\right] &= \mathbb{E}_0\left[\varphi(x)\mathbb{1}_{x>y+S_n}\right] + \mathbb{E}_0\left[\varphi(y+S_n)\mathbb{1}_{x\leq y+S_n}\right] \\ &= \varphi(x)\mathbb{P}(x-y>S_n) + \mathbb{E}_0\left[\varphi(y+S_n)1_{x-y\leq S_n}\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'après le lemme 2.6 :

$$\mathbb{P}(x-y>S_n) = \sum_{k=0}^{x-y-1} \mathbb{P}(S_n=k) \underset{n\to\infty}{\sim} (x-y)\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

Quant au second terme de (2.15), puisque $\mathbb{P}(S_n=k)\leq 1$ et que $\sum_{k\geq 0}\varphi(k)<\infty$ on a, en appliquant le Théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \sum_{k=x-y}^{n} \mathbb{P}(S_n=k)\varphi(y+k) &\underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=x-y}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(y+k) = \sum_{k=x}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(k) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\sum_{k=0}^{x-1}\varphi(k)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\phi(x)) \end{aligned}$$

□

Achevons la démonstration du premier point du Théorème 1.1. On garde les mêmes définitions que dans le lemme 2.5 pour $\widetilde{X}$ et $\widetilde{S}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)] &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p \vee (\sup_{0<q<p-n} X_{n+q}-X_n))] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_n \vee \left(X_n+\widetilde{S}_{p-n}\right)\right)] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{E}[\varphi\left(S_n \vee \left(X_n+\widetilde{S}_{p-n}\right)\right) \mid (S_n,X_n)]] \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.8 :

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)] \underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)\right]\right] \tag{2.17}$$

Si on fait $n=0$ et $\Lambda_0=\Omega$ dans (2.17), on obtient :

$$\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.18}$$

Ainsi d'après (2.17) et (2.18) on a :

$$\frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)]}{\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)]} \underset{p\to\infty}{\rightarrow} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(\varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n))]$$

□

2.ii) Vérifions maintenant que $(M_n^{\varphi}, n\geq 0)$ est une martingale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[M_n^{\varphi}] &= \mathbb{E}_0[\varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)] \\ &= \mathbb{E}_0[\phi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)] \\ &\leq \mathbb{E}_0[S_n-X_n]+1-\mathbb{E}_0[\phi(S_n)] \end{aligned}$$

Or $\phi\geq 0$ et comme $|S_n|\leq n$:

$$\mathbb{E}_0[M_n^{\varphi}]\leq 1+n$$

Ainsi, $M_n^{\varphi}\in L_1(\mathbb{R})$.
Soit $Y_{n+1}=X_{n+1}-X_n$, le pas de la marche aléatoire. Alors Y_{n+1} est centrée et indépendante de $\mathcal{F}_n$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^{\varphi}\mid\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(S_{n+1})(S_{n+1}-X_{n+1})+1-\phi(S_{n+1})\mid\mathcal{F}_n]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n\le S_n-1}\varphi(S_n)(S_n-X_n-Y_{n+1}+1-\phi(S_n)\mid \mathcal{F}_n])]\\
&+ \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n=S_n\}\cap\{Y_{n+1}=-1\}}\varphi(S_n)(S_n-X_n+1)+1-\phi(S_n)\mid \mathcal{F}_n]\\
&+ \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n=S_n\}\cap\{Y_{n+1}=1\}}\varphi(S_n+1)(S_{n+1}-X_{n+1})+1-\phi(S_n+1)\mid \mathcal{F}_n]\\
&:= (1)+(2)+(3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{1}_{X_n\le S_n-1}\varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)\\
(2) &= \mathbb{P}(Y-n+1=-1)\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[\varphi(S_n)+1-\phi(S_n)\right]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[\varphi(S_n)+1-\phi(S_n)\right]\\
(3) &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[1-\phi(S_{n+1})\right]=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[1-\phi(S_n)-\varphi(S_n)\right]
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M^{\varphi}_{n+1}\mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{1}_{X_n\le S_n-1}\varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)+\mathbb{P}(Y-n+1=-1)\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[\varphi(S_n)+1-\phi(S_n)\right]\\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[\varphi(S_n)+1-\phi(S_n)\right]+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=S_n}\left[1-\phi(S_n)-\varphi(S_n)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\le S_n-1}\varphi(S_n)(S_n-X_n)+\mathbb{1}_{X_n=S_n}\varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)\\
&= \varphi(S_n)(S_n-X_n)+1-\phi(S_n)\\
&= M^{\varphi}_n
\end{aligned}
$$

On a donc montré que $(M^{\varphi}_n, n\ge 0)$ était une martingale et il est facile de montrer qu'elle est positive. Ainsi, M^{φ}_n admet une limite p.s. lorsque n tend vers l'infini que l'on note M^{φ}_{∞}. Notons $T^{(n)}_0$, la suite des 0 de $(X_n, n\ge 0)$. Alors :

$$
M^{\varphi}_{T^{(n)}_0} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ \mathbb{P}\ \text{p.s.} \tag{2.19}
$$

ce qui implique :

$$
M^{\varphi}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ \mathbb{P}\ \text{p.s.}. \tag{2.20}
$$

En particulier, la martingale $(M^{h^+,h^-}_n, n\ge 0)$ n'est pas uniformément intégrable.

□

3) On va maintenant donner quelques résultats qui serviront à montrer les autres points du Théorème 1.1. Rappelons le résultat classique suivant (cf. [LG] pp.449).

Lemme 2.9. *Soient $(R_n, n\ge 0)$ la marche de Bessel de dimension 3 et $\sigma(a):=\inf\{k\ge 0, R_k=a\}$, le temps d'atteinte du niveau a du processus $(R_n, n\ge 0)$. Alors, pour tout $x\ge 1$, la suite $\left(\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1}, n\ge 1\right)$ est une $\mathbb{P}_x-$martingale.*

Démonstration du lemme 2.9. On note $\varepsilon_{n+1}=R_{n+1}-R_n$, le pas de la marche de Bessel. Alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right]+\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right]\\
&= \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_n+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right]\\
&= \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n-1}+\varepsilon_n+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\mid \mathcal{R}_{n-1}\right]\\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\left[\mathbb{P}_x(\varepsilon_n=1\mid \mathcal{R}_{n-1})\frac{1}{R_{n-1}+2}+\mathbb{P}_x(\varepsilon_n=-1\mid \mathcal{R}_{n-1})\frac{1}{R_{n-1}}\right]+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\left[\frac{R_{n-1}+2}{2R_{n-1}+2}\frac{1}{R_{n-1}+2}+\frac{R_{n-1}}{2R_{n-1}+2}\frac{1}{R_{n-1}}\right]+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\left[\frac{2R_{n-1}(R_{n-1}+2)}{R_{n-1}(R_{n-1}+2)(2R_{n-1}+2)}\right]+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\frac{1}{R_{n-1}+1}+\mathbb{1}_{\sigma(1)\le n-1}\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{R_{n-1\wedge\sigma(1)}+1}
\end{aligned}
$$

De plus, cette martingale est évidemment uniformément intégrable car bornée par 1. □

Lemme 2.10. *Soit $(R_n, n \geq 0)$ une marche de Bessel issue de $x > 0$ et soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a < x < b$. Alors :*

$$\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}} \tag{2.21}$$

et $\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{x+1}$. De plus, $J_o = \inf\limits_{n \geq 0} R_n$ suit la loi uniforme sur $[0, x]$.

Ce lemme est lui aussi classique et résulte du lemme 2.9 (cf [LG] pp. 449).

Démonstration du lemme 2.10. Grâce au lemme 2.9 on peut appliquer le Théorème d'arrêt de Doob et donc :

$$\mathbb{E}_x \left[\frac{1}{X_{n \wedge \sigma(1) \wedge \sigma(a) \wedge \sigma(b) + 1}} \right] = \frac{1}{x+1}$$

Comme $0 < a < x < b$, $\sigma(1)$ ne joue aucun rôle et donc lorsqu'on fait tendre n vers l'infini :

$$\mathbb{E}_x \left[\frac{1}{X_{\sigma(a) \wedge \sigma(b) + 1}} \right] = \frac{1}{x+1}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{a+1}\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) + \frac{1}{b+1}\mathbb{P}_x(\sigma(b) < \sigma(a)) & = & \frac{1}{x+1} \\ \mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) + \mathbb{P}_x(\sigma(b) < \sigma(a)) & = & 1 \end{cases}$$

qui implique :

$$\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}}$$

Faisant tendre b vers l'infini on obtient :

$$\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{x+1}$$

Enfin :

$$\mathbb{P}_x(J_0 \leq a) = \mathbb{P}_x(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{x+1}$$

□

On va maintenant énoncer un Théorème classique dû à Pitman dont on ne fera pas la démonstration(cf. [P])

Théorème 2.11. *La suite $2S_n - X_n = R_n^X$ est une marche de Bessel issue de 0. De plus, si $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0 et si $J_n = \inf\limits_{m > n} R_m$, alors les suites $(2S_n - X_n, S_n)_{n \geq 0}$ et $(R_n, J_n,)_{n \geq 0}$ ont même loi.*

Dans la suite plutôt que le Théorème précèdent on utilisera un de ses Corollaires :

Corollaire 2.12. *La loi conditionnelle de S_n sachant $\mathcal{F}_n^{2S-X}$ est la loi uniforme sur $[0, 2S_n - X_n]$.*

Démonstration du Corollaire 2.12. Grâce au Théorème 2.11, la loi conditionnelle de S_n sachant $\mathcal{F}_n^{2S-X}$ est aussi la loi conditionnelle de J_n sachant $\mathcal{R}_n$, mais grâce à la propriété de Markov, c'est aussi la loi de $\widetilde{J}_0 = \inf\limits_{n \geq 0} \widetilde{R}_n$ où $\widetilde{R}_n$ est une marche de Bessel issue de R_n. D'après le Lemme 2.10 on a :

$$\mathbb{P}_{R_n}(\widetilde{J}_0 \leq a) = \mathbb{P}_{R_n}(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{R_n + 1}$$

□

Remarque 2.13. *Soit $W_n := 2J_n - R_n$, W_n. Alors $(W_n, n \geq 0)$ est une marche aléatoire issue de $2J_0 - R_0$ et sa filtration est $\sigma(J_n, \mathcal{R}_n)$ que l'on note $\mathcal{F}_n^W$.*

Proposition 2.14. *Soit $(R_n, n \geq 0)$ une marche de Bessel. Si T est un temps d'arrêt de la suite $(R_n, J_n)_{n \geq 0}$ tel que $R_T = J_T$ alors $R_{T+n} - R_T$ est une marche de Bessel issue de 0 indépendante de $\mathcal{R}_T$*

Démonstration de la Proposition 2.14. Pour plus de facilité, supposons que R est issue de 0. De la remarque 2.13 on déduit que T est aussi un temps d'arrêt de W. Par conséquent, la propriété de Markov entraine : $\left(\widetilde{W}_n = W_{T+n} - W_T, n \geq 0\right)$ est une marche aléatoire issue de 0, indépendante de $\mathcal{F}_T^W$. D'après la définition de T, on a :

$$W_T = 2J_T - R_T = R_T$$

De plus (cf. démonstration du Théorème de Pitman, [P] pp.242-243), on a aisément que $S_n = J_n$, d'où :

$$J_{T+n} - J_T = J_{T+n} - R_T = J_{T+n} - W_T = S_{T+n} - S_T = \widetilde{S}_n$$

et :

$$\begin{aligned} R_{T+n} - R_T &= 2J_{T+n} - W_{T+n} - 2J_T + W_T \\ &= 2(J_{T+n} - J_T) - (W_{t+n} - W_T) \\ &= 2\widetilde{S}_n - \widetilde{W}_n \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème de Pitman $(R_{T+n} - R_T, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0 indépendante de $\mathcal{R}_n$. $\square$

4) Etudions maintenant le processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^φ.
4.i) Montrons que sous Q^φ, $S_\infty < \infty$ p.s. et que $Q^\varphi\,(S_\infty = p) = \varphi(p)$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition de Q^φ et d'après le Théorème d'arrêt de Doob :

$$Q_0^\varphi(S_n \geq p) = Q_0^\varphi(T_p \leq n) = \mathbb{E}_0[1_{T_p \leq n} M_n^\varphi] = \mathbb{E}_0[1_{T_p \leq n} M_{T_p}^\varphi]$$

Or :

$$M_{T_p}^\varphi = \varphi(S_{T_p})(S_{T_p} - X_{T_p}) + 1 - \phi(S_{T_p}) = 1 - \phi(S_{T_p}) = 1 - \phi(p)$$

Il en résulte que :

$$Q_0^\varphi(S_n \geq p) = (1 - \phi(p))\mathbb{P}(T_p \leq n),$$

d'où l'on déduit :

$$Q_0^\varphi(S_\infty \geq p) = 1 - \phi(p) \tag{2.22}$$

en faisant tendre $n \to \infty$. $\square$

4.ii) Montrons que sous Q^φ, $2S_n - X_n$ est une chaîne de Bessel de dimension 3.
Soit $(R_n, n \geq 0)$la suite définie par $R_n = 2S_n - X_n$. Grâce au Théorème 2.11, on sait que $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel sous $\mathbb{P}$. Etudions maintenant sa loi sous Q^φ.

Proposition 2.15. *Sous Q^φ, la loi de $(R_n, n \geq 0)$ est celle de la marche de Bessel de dimension 3 issue de 0.*

Démonstration de la Proposition 2.15. Soit F une fonction dépendant des $p+1$ premières coordonnées.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n^X, n \leq p)] &= \mathbb{E}[F(R_n^X, n \leq p) M_p^\varphi] \\ &= \mathbb{E}[F(R_n^X, n \leq p)\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p]] \\ \text{or} & \\ \mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p] &= \mathbb{E}[\varphi(S_p)(S_p - X_p) + 1 - \phi(S_p) \mid \mathcal{R}_p] \\ &= \mathbb{E}[\varphi(S_p)(S_p - 2S_p + R_p) + 1 - \phi(S_p) \mid \mathcal{R}_p] \\ &= \mathbb{E}[\varphi(S_p)(R_p - S_p) + 1 - \phi(S_p) \mid \mathcal{R}_p] \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 2.12 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p] &= \frac{1}{1+R_p}\left[\sum_{i=0}^{R_p}\varphi(i)(R_p-i)+1-\phi(i)\right] \\
&= \frac{1}{1+R_p}\left[\sum_{i=0}^{R_p}\varphi(i)(R_p-i)+R_p+1-\sum_{i=0}^{R_p}\sum_{j=0}^{i-1}\phi(j)\right]
\end{aligned}$$

or : $\sum_{j=0}^{i-1}\phi(j)=\sum_{i=0}^{R_p-1}\varphi(i)(R_p-i)$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p] &= \frac{1}{1+R_p}\left[\sum_{i=0}^{R_p-1}\varphi(i)(R_p-i)+\varphi(R_p)(R_p-R_p)-\sum_{i=0}^{R_p-1}\varphi(i)(R_p-i)+R_p+1\right] \\
&= \frac{R_p+1}{R_p+1} \\
&= 1 \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n,n\le p)]=\mathbb{E}[F(R_n,n\le p)]$$

□

5) Achevons la démonstration du Théorème 1.1 :
5.i) Montrons que $(R_n,n\ge 0)$est indépendant de S_∞ sous Q^φ.
On rappelle que $Q_0^{(k)}(\Lambda_n)$ est la limite de $\mathbb{P}(\Lambda_n \mid S_p=k)$ lorsque p tend vers l'infini et que cette limite est égale à :

$$Q_0^{(k)}(\Lambda_n)=\mathbb{P}(S_n=k)\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(k-X_n)\mid S_n=k]+\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}1_{S_n\le k}] \qquad (2.24)$$

Lemme 2.16. *La loi conditionnelle de Q^φ sachant $\{S_\infty=k\}$ ne dépend pas de φ.*

Démonstration du lemme 2.16.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}Q^{(k)}(\Lambda_n)\varphi(k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n=k)\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(k-X_n)\mid S_n=k]\varphi(k)+\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}1_{S_n\le k}]\varphi(k) \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_n)\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(S_n-X_n)\mid S_n]]+\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty}1_{\Lambda_n}1_{S_n\le k}\varphi(k)] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_n)(S_n-X_n)1_{\Lambda_n}]+\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty}1_{\Lambda_n}1_{S_n\le k}\varphi(k)] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_n)(S_n-X_n)1_{\Lambda_n}]+\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(1-\phi(S_n)] \\
&= \mathbb{E}[(\varphi(S_n)(S_n-X_n)+(1-\phi(S_n))\,1_{\Lambda_n}] \\
&= \mathbb{E}[1_{\Lambda_n}M_n^\varphi] \\
&= Q^\varphi(\Lambda_n) \text{ (d'après la définition de } Q^\varphi)
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall\Lambda\in\mathcal{F}_\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}Q^{(k)}(\Lambda)\varphi(k)=Q^\varphi(\Lambda). \qquad (2.25)$$

D'autre part, d'après le lemme 2.16, la loi de S_∞ sous Q^φ est φ d'où, $\forall\Lambda\in\mathcal{F}_\infty$:

$$Q^\varphi(\Lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}Q^\varphi(S_\infty=k)\mathbb{E}^Q[1_\Lambda\mid S_\infty=k]=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)Q^\varphi(\Lambda\mid S_\infty=k) \qquad (2.26)$$

Donc, si l'on compare (2.25) et (2.26), on a :

$$Q^{(k)}(\Lambda)=Q^\varphi(\Lambda\mid S_\infty=k) \qquad (2.27)$$

car $Q^{(k)}(.)$ et $Q^\varphi(.\mid S_\infty=k)$ ne chargent que $S_\infty=k$ (il suffit de prendre $\{\Lambda\cap S_\infty=k\}$).
On a donc bien que $Q^\varphi(.\mid S_\infty)$ ne dépend pas de φ. □

Proposition 2.17. *Sous Q^φ, $(R_n, n \geq 0)$ est indépendante de S_∞.*

Démonstration de la Proposition 2.17. Soit F une fonction dépendant des $p+1$ premières coordonnées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p) \mid S_\infty = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \mathbb{E}^{Q^{(k)}}[F(R_n, n \leq p)]
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p)] = \mathbb{E}^{Q^{(k)}}[F(R_n, n \leq p)] \tag{2.28}$$

D'après le lemme.2.16, la loi de $(R_n, n \geq 0)$ ne dépend pas de φ. Choisissant alors $\varphi = \delta_{y_0}$, sous $Q^{(y_0)}$, $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0. Or $Q^{(y_0)}$ est la loi de Q^φ sachant que $S_\infty = y_0$ et donc on a bien que $(R_n, n \geq 0)$ est indépendante de S_∞. □

5.ii) On va maintenant démontrer les points 2.ii.a, 2.ii.b et 2.ii.c.
Les résultats précèdents nous permettent de décrire le comportement de $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^φ sachant que $S_\infty = k$. On rappelle que $T_k = \inf\{n \geq 0, X_n = k\}$. Montrons que :

. $(X_n, n \leq T_k)$ est une marche aléatoire standard arrêtée lorsqu'elle atteint le niveau k
. $(k - X_{T_k+n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0
. Ces deux processus sont indépendants

Pour cela on va "reconstruire" le processus $(X_n, n \geq 0)$ à partir de $(R_n, n \geq 0)$ et $S_\infty = k$. Pour $n \leq T_k$, on sait que $R_n = 2S_n - X_n$ et pour $n \geq T_k$, sachant que $S_\infty = k$, on a que $R_n = 2k - X_n$. Donc :

$$\begin{aligned}
X_n &= 2J_n - R_n \text{ pour } n \leq T_k \\
&= 2k - R_n \text{ pour } n \geq T_k
\end{aligned}$$

Soit $J_k^* = \inf\{n \geq 0, J_n \geq k\}$. Montrons que $J_k^* = T_k$ dans ce cas. Si $n < J_k^*$:$X_n = 2J_n - R_n = 2S_n - R_n$. Supposons que $X_n \geq k$ et $S_m \geq k$ sur $[n, J_k^*]$, donc $J_m \geq k$ sur $[n, J_k^*]$ d'où $n = J_k^*$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\begin{aligned}
X_n &= 2J_n - R_n \text{ pour } n \leq J_k^* \\
&= 2k - R_n \text{ pour } n \geq J_k^*
\end{aligned}$$

Or J_k^* est un temps d'arrêt de $(R_n, J_n)_{n \geq 0}$ tel que $R_{J_k^*} = J_{J_k^*}$.
D'après la Proposition 2.12,$(R_{J_k^*+n} - R_{J_k^*}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0, indépendante de $\mathcal{F}_{T_k}$. Or :

$$2k - X_{J_k^*+n} = R_{J_k^*+n} \Longleftrightarrow k - X_{J_k^*+n} = R_{J_k^*+n} - k \tag{2.29}$$

Ce qui montre que $(k - X_{n+J_k^*}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0 indépendante de $\mathcal{F}^X_{J_k^*}$ qui est égale à $\mathcal{F}^X_{T_k}$ sous Q^φ sachant que $S_\infty = k$. Enfin, soit f une fonction de n variables. D'après la propriété de Markov forte et la Proposition 2.17 :

$$\begin{aligned}
Q^\varphi(f(S_\infty - X_{T_\infty+1}, ..., S_\infty - X_{T_\infty+n})) &= \sum_{k \geq 0} Q^\varphi(f(S_{T_k} - X_{T_k+1}, ..., S_{T_k} - X_{T_k+n}) \mathbb{1}_{S_\infty = k}) \\
&= \sum_{k \geq 0} Q^\varphi(f(R_{T_k} - R_{T_k+1}, ..., R_{T_k} - R_{T_k+n}) \mathbb{1}_{S_\infty = k}) \\
&= \sum_{k \geq 0} Q^\varphi(f(R_{T_k} - R_{T_k+1}, ..., R_{T_k} - R_{T_k+n}) \mid S_\infty = k) Q^\varphi(S_\infty = k) \\
&= \sum_{k \geq 0} Q^\varphi(f(R_{T_k} - R_{T_k+1}, ..., R_{T_k} - R_{T_k+n})) Q^\varphi(S_\infty = k) \\
&= \sum_{k \geq 0} Q^\varphi(f(R_1, ..., R_n)) Q^\varphi(S_\infty = k) \\
&= Q^\varphi(f(R_1, ..., R_n)) \sum_{k \geq 0} Q^\varphi(S_\infty = k) \\
&= Q^\varphi(f(R_1, ..., R_n))
\end{aligned}$$

□

3 Pénalisation par une fonction du temps local : Démonstration du Théorème 1.2

Definition 3.1. On rappelle que ce que l'on appelle marche de Bessel* de dimension 3 : c' est la chaîne de Markov notée $(\tilde{R}_n, n \geq 0)$ définie par les probabilités de passage suivantes :
.$\mathbb{P}_0(\tilde{R}_1 = 1) = 1$
.Si $x \geq 1$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x+1 \mid \tilde{R}_n = x) &= \frac{1}{2}\frac{x+1}{x} \\ \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x-1 \mid \tilde{R}_n = x) &= \frac{1}{2}\frac{x-1}{x} \end{cases}$$

1.i) Vérifions déjà que $\left(M_n^{h^+,h^-}, n \geq 0\right)$ est une martingale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-}] &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-} \mathbb{1}_{X_n \geq 1}] \\ &+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-} \mathbb{1}_{X_n \leq -1}] \\ &+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-} \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=1}] \\ &+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-} \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=-1}] \\ &:= (A) + (B) + (C) + (D) \end{aligned}$$

Si on pose, $Y_{n+1} = X_{n+1} - X_n$, Y_n est centrée et indépendante de $\mathcal{F}_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} (A) &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[X_{n+1}^+ h^+(L_{n+1}) + X_{n+1}^- h^-(L_{n+1}) + 1 - H(L_{n+1})\mathbb{1}_{X_n \geq 1})] \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(X_n + Y_{n+1})^+ h^+(L_n) + 0 \times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n \geq 1})] \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(X_n + Y_{n+1}) h^+(L_n) + 0 \times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n \geq 1})] \\ &= [(X_n)^+ h^+(L_n) + 0 \times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n \geq 1}] + \mathbb{E}[Y_{n+1})]]h^+(L_n) \\ &= (X_n)^+ h^+(L_n) + 0 \times h^-(L_n) + (1 - H(L_n))\mathbb{1}_{X_n \geq 1} \end{aligned}$$

En faisant le même raisonnement pour (B), on obtient :

$$(B) = (X_n)^- h^+(L_n) + 0 \times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n \leq -1}$$

On s'intéresse maintenant à la partie (C) :

$$\begin{aligned} (C) &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[X_{n+1}^+ h^+(L_{n+1}) + X_{n+1}^- h^-(L_{n+1}) + 1 - H(L_{n+1})\mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=1}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(X_n+1)^+ h^+(L_n+1) + (X_n+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n+1)\mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=1}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(0+1)^+ h^+(L_n+1) + (0+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) \\ &- \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0, Y_{n+1}=1}] \\ &= [(0+1)^+ h^+(L_n+1) + (0+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) \\ &- \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) \\ &= [(0+1)^+ h^+(L_n+1) + (0+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) \\ &- \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\frac{1}{2} \\ &= [h^+(L_n+1) + 1 - H(L_n) - \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\frac{1}{2} \end{aligned}$$

De la même façon on obtient que :

$$(D) \quad = \quad [h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) - \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\frac{1}{2}$$

Ainsi, la somme de (A),(B),(C) et (D) est égale à $M_n^{h^+,h^-}$. Le fait que $(M_n^{h^+,h^-}, n \geq 0)$ soit positive résulte immédiatement des définitions des fonctions h^+, h^- et H. Ainsi, $M_n^{h^+,h^-}$ admet une limite p.s. lorsque n tend vers l'infini que l'on note $M_\infty^{h^+,h^-}$.Notons $T_0^{(n)}$, la suite des 0 de $(X_n, n \geq 0)$. Alors :

$$M_{T_0^{(n)}}^{h^+,h^-} = 1 - H\left(L_{T_0^{(n)}}\right) \underset{n \to \infty}{\to} 0, \ \mathbb{P} \text{ p.s.} \tag{3.1}$$

ce qui implique que

$$M_n^{h^+,h^-} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ \mathbb{P}\text{ p.s..} \tag{3.2}$$

En particulier, la martingale $(M_n^{h^+,h^-}, n \geq 0)$ n'est pas uniformément intégrable.

□

1.ii) On va maintenant montrer la formule 1.8 du Théorème 1.2.

Pour cela, nous utiliserons les résultats suivants :

Lemme 3.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(L_n = k\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\left(\frac{2}{n\pi}\right)}$$

Lemme 3.3. *Soit $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} h(k) < \infty$ et soient a positif et x un élément de $\mathbb{Z}$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n\geq 0}] &\underset{n\to\infty}{\sim} h(a)x^+\sqrt{\left(\frac{2}{n\pi}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}\sum_{k=1}^{\infty} h(k) \\
\mathbb{E}_x[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n\leq 0}] &\underset{n\to\infty}{\sim} h(a)x^-\sqrt{\left(\frac{2}{n\pi}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}\sum_{k=1}^{\infty} h(k)
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 3.2. Posons $\gamma_n = |\{p \leq n, X_p = 0\}|$ où $|A|$ est le cardinal de A. γ_n est ainsi le nombre de visites en 0 avant l'instant n.
Il est clair que :

$$L_n = \gamma_n \mathbb{1}_{X_n\neq 0} + (\gamma_n - 1)\mathbb{1}_{X_n=0} = \gamma_n - \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} \tag{3.3}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_n = k) &= \mathbb{P}(\gamma_n = k, X_n \neq 0) + \mathbb{P}(\gamma_n = k+1, X_n = 0) &(3.4)\\
&= \mathbb{P}(\gamma_n = k) - \mathbb{P}(\gamma_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(\gamma_n = k+1, X_n = 0) &(3.5)
\end{aligned}$$

Nous allons étudier la loi de γ_n. On définit la suite $(V_n, n \geq 0)$ par :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = \inf\{k > 0, X_{V_n+k} = 0\} \end{cases}$$

On pose $T_i = \inf(k \geq 0, X_n = i)$. Grâce à la symétrie de la marche aléatoire et la propriété de Markov, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 = k) &= \mathbb{P}(V_1 = k, X_1 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = k, X_1 = -1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(V_1 = k \mid X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(V_1 = k \mid X_1 = -1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(T_0 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}(T_0 = k-1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(T_1 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(T_1 = k-1) \\
&= \mathbb{P}_0(T_1 = k-1)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$V_1 \overset{\mathcal{L}}{=} T_1 + 1 \tag{3.6}$$

Pour plus de clarté notons $(X_n^{(1)}, n \geq 0) = (X_n, n \geq 0)$ et définissons $(X_n^{(k)}, n \geq 0)$ par :

$$X_n^{(k)} = X_{V_k+n}, \quad \forall n \tag{3.7}$$

Soit $T_{(i)}^{(k)} = \inf\left\{k \geq 0, X_n^{(k)} = i\right\}$.
Par un raisonnement identique au précédent, on prouve que :

$$V_2 \overset{\mathcal{L}}{=} T_1^{(2)} + 1 \tag{3.8}$$

De plus, d'après la propriété de Markov forte, $(X_n^{(2)}, n \geq 0)$ est indépendante de $\mathcal{F}_{V_1}$ et donc :

$$V_1 + V_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + 2 \tag{3.9}$$

D'où, par récurrence :

$$V_1 + V_2 + ... + V_k \stackrel{\mathcal{L}}{=} T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + ... + T_1^{(k)} + k \tag{3.10}$$

D'autre part, on a de manière évidente que :

$$T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + ... + T_1^{(k)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} T_k \tag{3.11}$$

Ainsi (3.4) devient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\gamma_n = k) &= \mathbb{P}(V_1 + ... + V_k \leq n < V_1 + ... + V_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(T_k + k \leq n < T_{k+1} + k + 1) \\
&= \mathbb{P}(T_k \leq n - k, T_{k+1} > n - k - 1) \\
&= \mathbb{P}(S_{n-k} \geq k, S_{n-k-1} \leq k) \\
&= \mathbb{P}(S_{n-k} = k, S_{n-k-1} \leq k) + \mathbb{P}(S_{n-k} = k + 1, S_{n-k-1} \leq k) \\
&= \mathbb{P}(S_{n-k} = k) + \mathbb{P}(T_{k+1} = n - k)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = k) + \mathbb{P}(T_{k+1} = n - k) - \mathbb{P}(\gamma_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(\gamma_n = k + 1, X_n = 0) \tag{3.12}$$

D'après [F1] pp. 89, on sait que le temps de premier passage en r est égal à n avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(T_r = n\right) := \varphi_{r,n} = \frac{r}{n} C_n^{\frac{n+r}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{3.13}$$

et que le $r-$ième retour en 0 a lieu à l'instant n avec la probabilité :

$$\varphi_{r,n-r} = \frac{r}{n-r} C_{n-r}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} \tag{3.14}$$

Mais d'après le lemme 2.6 :

$$\varphi_{r,n} \underset{n\to\infty}{\sim} r\left(\frac{2}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \mathbb{P}(S_{n-k} = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent, d'après 3.12 :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

□

Démonstration du lemme 3.3. Tout d'abord, il est clair que grâce à la symétrie de X et $-X$, il suffit de montrer une seule des deux équivalences.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}] &= \mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}\mathbb{1}_{T_0 > n}] \\
&+ \mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}\mathbb{1}_{T_0 \leq n}] \\
&:= (1)_n + (2)_n
\end{aligned}$$

On a :

$$h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n > 0}\mathbb{1}_{T_0 > n} = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ h(a)\mathbb{1}_{T_0 > n} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
(1)_n : \quad &= h(a)\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{P}_x(T_0 > n) \\
&= h(a)\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{P}_0(T_x > n) \\
&= h(a)\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{P}_0(x > S_n) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} x\mathbb{1}_{x>0}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} x^+\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'autre part, soit

$$\widetilde{X}_n := X_{n+T_0} - X_{T_0} = X_{n+T_0}$$

D'après la propriété de Markov forte, $(\widetilde{X}_n, n \geq 0)$ est une marche aléatoire standard indépendante de $\mathcal{F}_{T_0}$. Soit $\widetilde{L}$ son temps local en 0. Alors :

$$\begin{aligned}
(2)_n &= \mathbb{E}_x[h(\widetilde{L}_{n-T_0} + a)\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{n-T_0} \geq 0}\mathbb{1}_{T_0 \leq n}] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T_0 \leq n}\widetilde{\mathbb{E}}_0[h(\widetilde{L}_{n-T_0} + a)\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{n-T_0} \geq 0}]]
\end{aligned}$$

Posons :

$$g(n) = \mathbb{E}_0[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}]$$

Par symétrie, on a :

$$\begin{aligned}
g(n) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_0[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}] + \mathbb{E}_0[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \leq 0}] \\
&= \frac{1}{2}\{\mathbb{E}_0[h(L_n + a)] - \mathbb{E}_0[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n = 0}]\}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Or :

$$\mathbb{E}_0[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n = 0}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_n = k, X_n = 0)$$

Et d'après le lemme 3.2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_n = k, X_n = 0) &= \mathbb{P}(X_n = 0, \gamma_n = k + 1) \\
&= \varphi_{k+1,n-k+1} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} (k+1)\left(\frac{2}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Encore une fois, d'après le lemme 3.2, comme $\mathbb{P}(L_n = k) \leq 1$ et que l'on a supposé que $\sum_{k\geq 1} h(k) < \infty$, on applique le Théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0[h(L_n + a)] &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(L_n = k)h(a + k) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 1} h(a + k) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 1+a} h(k)
\end{aligned}$$

De cette façon, il est clair que le deuxième terme de (3.16) est négligeable par rapport au premier ce qui achève la démonstration. □

Grâce à ces deux lemmes, le premier point du Théorème 1.2 se démontre aisément :
On pose $\widetilde{X}_k = X_{k+n} - X_n$ et soit $\widetilde{L}$ le temps local associé à $\left(\widetilde{X}_k, k \geq 0\right)$, on applique les deux lemmes précédents avec :

$$\begin{aligned}
a &\longleftrightarrow L_n \\
x &\longleftrightarrow X_n \\
p &\longleftrightarrow p - n \\
(X_n, n \geq 0) &\longleftrightarrow (\widetilde{X}_n, n \geq 0) \\
(L_n, n \geq 0) &\longleftrightarrow (\widetilde{L}_n, n \geq 0)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p>0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p<0})] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(h^+(L_n + \widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}>0} + h^-(L_n + \widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}<0})] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\widetilde{\mathbb{E}}_{X_n}(h^+(L_n + \widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}>0} + h^-(L_n + \widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}<0})] \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}[X_n^+ h^+(L_n) + X_n^- h^-(L_n) + \frac{1}{2}\sum_{k=L_n+1}^{\infty}(h^+(k) + h^-(k))]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Et si on fait $n=0$ et $\Lambda_0=\Omega$ dans (3.17), le dénominateur de la formule (1.8) est équivalent à :

$$\mathbb{E}_x[(h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p>0}+h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p<0})] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

et en effectuant le quotient de ces deux équivalences on obtient le premier point du Théorème 1.2.

□

2.i) Montrons que L_∞ est fini p.s. sous Q^{h^+,h^-} et que $Q^{h^+,h^-}(L_\infty=k)=\frac{1}{2}\left(h^+(k)+h^-(k)\right)$.

On pose $\tau_l=\inf\{k\geq 0, L_k=l\}$. Alors :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(L_n\geq l) &= Q_0^{h^+,h^-}(\tau_l\leq n) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}M_{\tau_l}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}(1-H(l)+X^+_{\tau_l\leq n}h^+(l)+X^-_{\tau_l\leq n}h^-(l)] \end{aligned}$$

Or, par symétrie :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_l\leq n) &= \mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=1)+\mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=-1) \\ &= 2\mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_l\leq n) &= \mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=1) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(L_n\geq l) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}](1-H(l))+\mathbb{E}[X^+_{\tau_l\wedge n}\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}]h^+(l)+\mathbb{E}[X^-_{\tau_l\wedge n}\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}]h^-(l) \\ &= (1-H(l))\mathbb{P}(\tau_l\leq n)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_l\leq n)(h^+(l)+h^-(l)) \\ &= (1-H(l-1))\mathbb{P}(\tau_l\leq n) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Mais, la marche aléatoire $(X_n, n\geq 0)$ étant récurrente, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\tau_l\leq n) \;=\; 1,$$

et donc, d'après (3.19) :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Q_0^{h^+,h^-}(L_n\geq l) &= Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty\geq l) \\ &= 1-H(l-1) \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty=l) &= Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty\geq l)-Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty\geq l+1) \\ &= H(l)-H(l-1) \\ &= \frac{1}{2}(h^+(l)+h^-(l)) \end{aligned}$$

□

2.ii) Effectuons l'étude du processus $(X_n, n\geq 0)$ sous Q^{h^+,h^-}.

Pour cela, on a besoin des trois lemmes suivants :

Lemme 3.4. *Sous $\mathbb{P}_1$ conditionnellement à $\{T_p\leq T_0\}$, la loi de $(X_n, 0\leq n\leq T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3 (au sens de la Définition 3.1).*

Lemme 3.5. *Sous $Q_1^{h^+,h^-}$ conditionnellement à $\{T_p\leq T_0\}$ la loi de $(X_n, 0\leq n\leq T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3(au sens de la Définition 3.1).*

Lemme 3.6. *Posons $\Gamma^+:=\{X_{n+g}>0,\forall n>0\}$ et $\Gamma^-:=\{X_{n+g}<0,\forall n>0\}$*

Alors :

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}h^+(k) \tag{3.20}$$

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^-) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}h^-(k) \tag{3.21}$$

Démonstration du lemme 3.4. cf. [LG] □

Démonstration du lemme 3.5. Soient f et G deux fonctions de $\mathbb{Z}$ (respectivement $\mathbb{Z}^n$) dans $\mathbb{R}^+$. Alors, d'après la définition de la probabilité Q et grâce au Théorème d'arrêt de Doob :

$$\begin{aligned} Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0] &= \frac{Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}]}{Q_1^{h^+,h^-}(T_p < T_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}M_{T_0}^{h^+,h^-}]}{\mathbb{P}_1(\mathbb{1}_{T_p<T_0}M_{T_0}^{h^+,h^-})} \end{aligned}$$

or :

$$M_{T_0}^{h^+,h^-} = 1 - H(1)$$

i.e. $M_{T_0}^{h^+,h^-}$ est constante. Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0] &= \frac{\mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}(1-H(1))]}{\mathbb{P}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}(1-H(1))\right]} \\ &= \frac{\mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}]}{\mathbb{P}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}\right]} \\ &= \mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0] \end{aligned}$$

□

D'autre part, comme :

$$Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_0 = \infty] = \lim_{p\to\infty} Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0]$$

on en déduit que $(X_n, n \geq 0)$ sachant que $\{T_0 = \infty\}$ est une marche de Bessel* de dimension 3.

Démonstration du lemme 3.6. Puisque g est fini Q^{h^+,h^-} p.s. et que $X_n \neq 0$ pour $n > g$, on a :

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+) = \lim_{n\to\infty} Q_0^{h^+,h^-}(X_n > 0) \tag{3.22}$$

Or :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(X_n > 0) &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}M_n^{h^+,h^-}] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}(1-H(L_n))] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}X_n^+h^+(L_n)] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}(1-H(L_n))] + \mathbb{E}_0[X_n^+h^+(L_n)] \end{aligned}$$

Comme :

$$\mathbb{1}_{X_n>0}(1-H(L_n)) \leq 1 - H(L_n) \leq 1$$

d'après le Théorème de convergence dominée on a :

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}(1-H(L_n))] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.23}$$

Grâce au premier point du Théorème 1.2 :

$$M_n^{h^+,0} = 1 - \widetilde{H}(L_n) + X_n^+h^+(L_n)$$

où $\widetilde{H}(L_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n} h^+(k)$, est une martingale (il n'est pas nécessaire que $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{H}(n) = 1$ pour cela).
Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[M_n^{h^+,0}] &= \mathbb{E}_0[M_1^{h^+,0}] \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^+(1) + \mathbb{E}_0[X_1^+h^+(L_1)] \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^+(1) + \frac{1}{2}h^+(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0[\tilde{H}(L_n)] &= \mathbb{E}_0[X_n^+ h^+(L_n)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_0[\sum_{k=1}^{L_n} h^+(k)] \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k)\end{aligned}$$

Cette somme étant finie, d'après le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_0[\tilde{H}(L_n)] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k) \tag{3.24}$$

Ainsi, d'après (3.22)

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k)$$

□

2.ii.a) Montrons les points 2.ii.a et 2.ii.b du Théorème 1.2 : Soient F et G deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{E}_0^Q[F(X_{g+1},...,X_{g+n})G(X_{n+g+1})] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},X_{k+2},...,X_{k+n})G(X_{k+g+1})\mathbb{1}_{g=k}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},X_{k+2},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1})\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=1}]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},X_{k+2},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1})\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=-1}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1}) \mid g=k, X_{k+1}=1]Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=1)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1}) \mid g=k, X_{k+1}=-1]Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=-1)$$

$$= \mathbb{E}_1^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty]\sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=1)$$

$$+ \mathbb{E}_{-1}^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty]\sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=-1)$$

$$= \mathbb{E}_1^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty]\sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+)$$

$$+ \mathbb{E}_{-1}^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty]\sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^-)$$

□

2.ii.b) On va terminer la démonstration en montrant que conditionnellement à $\{L_\infty = l\}$, sous Q^{h^+,h^-}, $(X_u, u < g+1)$ est une marche aléatoire standard arrêtée lorsque son temps local atteint le niveau l.
Soit F une fonction sur $\mathbb{Z}^n$ et soit l un élément de $\mathbb{Z}$. D'après la définition de Q et le Théorème d'arrêt, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}] &= \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}M_{\tau_l}^{h^+,h^-}] \\ &= \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}(1-H(l)+\frac{1}{2}(h^+(l)+h^-(l))] \\ &= \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}](1-H(l-1))\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne résulte d'un raisonnement analogue à celui de la démonstration du point 2.i.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l} \mid L_\infty = l] &= \frac{\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}\mathbb{1}_{\tau_{l+1}=\infty}]}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}] - \mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}]}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}M_{\tau_l}] - \mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}M_{\tau_{l+1}}]}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}](1 - H(l-1) - 1 + H(l))}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}](\frac{1}{2}(h^+(l) + h^-(l))}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)}
\end{aligned}$$

Comme $Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l) = \frac{1}{2}(h^+(l) + h^-(l))$, on a immédiatement que :

$$\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l} \mid L_\infty = l] = \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}] \tag{3.25}$$

□

4 Pénalisation par la longueur des excursions : Démonstration du Théorème 1.3

Pour $n \geq 0$, on note g_n (respectivement d_n), le dernier zero avant n (respectivement le premier zéro après n).

$$g_n := \sup\{k \leq n, X_k = 0\} \tag{4.1}$$
$$d_n := \inf\{k > n, X_k = 0\} \tag{4.2}$$

Ainsi, $d_n - g_n$ définit la longueur de l'excursion qui enjambe n. On pose :

$$\Sigma_n = \sup\{d_k - g_k, d_k \leq n\} \tag{4.3}$$

i.e. Σ_n est la plus grande excursion avant g_n. On peut aussi remarquer que :

$$\Sigma_n = \Sigma_{g_n} \tag{4.4}$$

Définissons $(A_n, n \geq 0)$, le processus de l'âge :

$$A_n = n - g_n \tag{4.5}$$

On note la filtration naturelle de ce processus $\mathcal{A}_n = \sigma(A_n, n \geq 0)$.
On note :

$$A_n^* = \sup_{k \leq n} A_k \tag{4.6}$$

On remarque que :

$$A_n^* = (\Sigma_n - 1) \vee (n - g_n) \tag{4.7}$$

et donc :

$$A_{g_n}^* = \Sigma_{g_n} - 1 \tag{4.8}$$

1.i) Démontrons déjà la formule 1.12.
Rappelons déjà le Théorème Taubérien pour les séries entières([F2], pp. 442-448).

Théorème 4.1. *Soit $q_n \geq 0$ et on suppose que :*

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n \tag{4.9}$$

converge pour $0 \leq s < 1$. Si $0 \leq p < \infty$ alors les deux relations :

$$S(s) \underset{s\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-s)^p} C \tag{4.10}$$

et :

$$q_0 + q_1 + ... + q_{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(p+1)} n^p C, \tag{4.11}$$

où $0 < C < \infty$, sont équivalentes.
De plus, si la suite $\{q_n\}$ est monotone et $0 < p < \infty$, alors (4.10) est équivalente à :

$$q_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(p)} n^{p-1} C \tag{4.12}$$

Proposition 4.2.

$$\mathbb{P}(\Sigma_k \leq x) \underset{k\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[|X_x| \mid \tau > x\right] \tag{4.13}$$

Pour démontrer cette Proposition, on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \geq 0$:*

$$\mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid A_n = k\right] = \mathbb{E}_0\left[f(X_k) \mid \tau > k\right] \tag{4.14}$$

Démonstration du lemme 4.3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid A_n = k\right] &= \mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid n - g_n = k\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} \neq 0, ..., X_n \neq 0\right], \text{ d'après la propriété de Markov} \\
&= \mathbb{E}_0\left[f(X_k) \mid \tau > k\right]
\end{aligned}$$

□

Démonstration de la Proposition 4.2.
Soit δ_β, une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre β, avec $1 > \beta > 0$ et telle que δ_β est indépendante de la marche X.
D'après (4.4) et (4.8), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(A^*_{g_{\delta_\beta}} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Sigma_{g_{\delta_\beta}} \leq x + 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Sigma_{g_{\delta_\beta}} \leq x\right) \quad \text{, car } x \text{ et } \Sigma_{g_{\delta_\beta}} \text{ sont tous les deux pairs} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\delta_\beta = k, \Sigma_k \leq x\right), \text{ toujours d'après (4.4).} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\delta_\beta = k\right) \mathbb{P}\left(\Sigma_k \leq x\right) \quad \text{, comme } \delta_\beta \text{ et } X \text{ sont indépendants.} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1-\beta)^{k-1} \beta \mathbb{P}\left(\Sigma_k \leq x\right)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(A^*_{g_{\delta_\beta}} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T^A_x \geq g_{\delta_\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\delta_\beta \leq d_{T^A_x}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\delta_\beta > d_{T^A_x}\right) \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{d_{T^A_x}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T^A_x} (1-\beta)^{T_0 \circ \theta_{T^A_x}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T^A_x} \mathbb{E}_{X_{T^A_x}}\left[(1-\beta)^{T_0}\right]\right] \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Or d'après [ALR] pour $0 < x < 1$, on a :

$$\mathbb{E}[x^{T_k}] = \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{-k} \tag{4.16}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{X_{T_x^A}}\left[(1-\beta)^{T_0}\right] &= \mathbb{E}_0\left[(1-\beta)^{T_{|X_{T_x^A}|}}\right] \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{1-(1-\beta)^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{2\beta}\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $X_{T_x^A}$ et $\mathcal{A}_{T_x^A}$ sont indépendants (cf. [ALR])
Ainsi, la formule (4.15), devient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \le x\right) &= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\left(\frac{1+\sqrt{2\beta}\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\right]\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta}\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]
\end{aligned}$$

On cherche z tel que :

$$\mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)^{T_x^A}}\right] \tag{4.17}$$

On rappelle que :

$$\mathrm{Argch}(x) = \ln\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\} \tag{4.18}$$

En posant :

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{1}{1-\beta} \tag{4.19}$$

alors :

$$\begin{aligned}
z &= \mathrm{Argch}\left(\frac{1}{1-\beta}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{1-\beta}+\sqrt{\frac{1}{(1-\beta)^2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)
\end{aligned}$$

Toujours d'après [ALR]

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right)^{T_x^A}\right] = \mathbb{E}[\exp(zX_{T_x^A})] \tag{4.20}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{X_{T_x^A}}\right] \tag{4.21}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \le x\right) &= 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{X_{T_x^A}}\right]} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{|X_{T_x^A}|}\right] - \mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]\right]}{\frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{|X_{T_x^A}|}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]\right]}
\end{aligned}$$

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right]^k &\underset{\beta\to 0^+}{\sim} \left[1+\sqrt{2\beta}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\right]^k \\
&\underset{\beta\to 0^+}{\sim} 1+k\sqrt{2\beta}
\end{aligned}$$

Par conséquent 0 :

$$\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \le x\right) \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]\sqrt{2\beta} \tag{4.22}$$

On a donc obtenu :

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta)^{k-1}\beta\mathbb{P}\left(\Sigma_k \le x\right) \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \sqrt{2\beta}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right] \tag{4.23}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta)^{k}\mathbb{P}\left(\Sigma_k \le x\right) \underset{\beta\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\beta}}(1-\beta)\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right] \tag{4.24}$$

On va poser $\alpha = 1-\beta$ de manière à appliquer le Théorème Taubérien 4.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k\mathbb{P}\left(\Sigma_k \le x\right) &\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}\alpha\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right] \\
&\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]
\end{aligned}$$

On applique donc le Théorème Taubérien 4.1 avec $p = \frac{1}{2}$ et $C = \sqrt{2}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Sigma_k \le x) &\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}k^{\frac{1}{2}-1}C \\
&\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]
\end{aligned}$$

□

Grâce à ce qui précède on peut achever la démonstration du point 1.i.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_p \le x}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n \le x}\left[\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n > p-n} + \mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n \le (p-n)\wedge(x-A_n)}\mathbb{1}_{\Sigma_{p-n-T_0\circ\theta_n}\le x}\right]\right] \\
&= (1)+(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n \le x}\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n > p-n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n \le x}\mathbb{P}_{|X_n|}\left(T_0 > p-n\right)\right] \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n \le x}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|X_n|}{p^{\frac{1}{2}}}\right]
\end{aligned}$$

$$(2) \quad = \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\le(p-n)\wedge(x-A_n)}\mathbb{1}_{\Sigma_{p-n-T_0\circ\theta_n}\le x}\right]$$

Lorsque p tend vers l'infini, comme sous $\mathbb{P}$, $A_n < +\infty$ p.s. :

$$\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\le(p-n)\wedge(x-A_n)} \sim \mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\le x-A_n} \tag{4.25}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(2) \quad &\underset{p\to\infty}{\sim} \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{1}_{A_n\le x}\mathbb{P}_{X_n}(\tilde{T}_0\le x-A_n)\mathbb{P}\left(\Sigma_{p-n-T_0}\le x\right)\right]\\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{1}_{A_n\le x}\mathbb{P}_{X_n}(\tilde{T}_0\le x-A_n)\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\theta(x)\right]\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_p\ge x}]}{\mathbb{E}_0[\Sigma_p\ge x]} = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\le x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\right] \tag{4.26}$$

□

1.ii) On va maintenant montrer que $(M_n, n\ge 0)$ est bien une martingale. Pour cela, on doit faire attention à la parité de $n+1$ et on va donc décomposer en deux cas. Rappelons tout d'abord que $\theta(x)=\mathbb{E}\left[|X_x|\,|\tau>x\right]$. Supposons que $n+1$ est impair.

$$M_{n+1} = \left\{\frac{|X_{n+1}|}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\le x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\le x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x} \tag{4.27}$$

Comme $X_{n+1}\neq 0$, on a $\Sigma_{n+1}=\Sigma_n$.
Tout d'abord, on peut voir facilement que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_{n+1}|\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}X_{n+1}-\mathbb{1}_{X_n<0}X_{n+1}+\mathbb{1}_{X_n=0}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}-\mathbb{1}_{X_n<0}X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]+\mathbb{1}_{X_n=0,\Sigma_n\le x}\\ &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}X_n-\mathbb{1}_{X_n<0}X_n\right]+\mathbb{1}_{X_n=0}\\ &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}|X_n|+\mathbb{1}_{X_n=0}\end{aligned}$$

On va donc s'intéresser maintenant à :

$$\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\le x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\le x,\Sigma_{n+1}\le x}$$

en remarquant qu'ici $A_{n+1}=A_n+1$ et que $X_n=0$ implique que $A_n=0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\le x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\le x,\Sigma_{n+1}\le x} &= \mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1,\Sigma_n\le x}\\ &= \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,X_{n+1}=X_n+1,A_n\le x-1,\Sigma_n\le x\}}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,X_{n+1}=X_n-1,A_n\le x-1,\Sigma_n\le x\}}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n=0,X_{n+1}=X_n+1,\Sigma_n\le x\}}\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0\le x-1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n=0,X_{n+1}=X_n-1,\Sigma_n\le x\}}\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0\le x-1\right)\end{aligned}$$

En conditionnant par $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\le x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\le x,\Sigma_{n+1}\le x}|F_n\right] &= \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\le x-1,\Sigma_n\le x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\le x-1,\Sigma_n\le x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n=0,\Sigma_n\le x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0\le x-1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n=0,\Sigma_n\le x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0\le x-1\right)\end{aligned}$$

On peut voir que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n, X_{n+1} = X_n + 1\right) &= \mathbb{P}_{X_n}\left(X_{n+1} = X_n + 1\right)\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n \mid X_{n+1} = X_n + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n \mid X_{n+1} = X_n + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right)
\end{aligned}$$

Si on effectue un raisonnement analogue avec $\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right)$, si on note

$$(A) = \mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n \le x-1, \Sigma_n \le x\}}\left\{\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n - 1\right) + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n - 1\right)\right\},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
(A) &= \mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n \le x-1, \Sigma_n \le x\}}\left\{\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n, X_{n+1} = X_n + 1\right) + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n, X_{n+1} = X_n - 1\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n \le x-1, \Sigma_n \le x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n \le x, \Sigma_n \le x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right) - \mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n = x, \Sigma_n \le x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 = 0\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n = x, \Sigma_n \le x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 = 0\right) = 0$$

Par conséquent :

$$(A) = \mathbb{1}_{\{X_n \neq 0, A_n \le x, \Sigma_n \le x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right) \tag{4.28}$$

Il reste donc à démontrer que :

$$\mathbb{1}_{\{X_n = 0, \Sigma_n \le x\}}\frac{1}{2}\left[\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \le x - 1\right) + \mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \le x - 1\right)\right] = \mathbb{1}_{X_n = 0, \Sigma_n \le x}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right). \tag{4.29}$$

Pour cela, on va utiliser un résultat classique ([F1] pp.73-77)

$$\mathbb{P}\left(X_1 > 0, X_2 > 0, ..., X_{2n-1} > 0, X_{2n} = 2r\right) = \frac{1}{2}\left(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}\right) \tag{4.30}$$

où $p_{n,r} = \frac{1}{2^n}C_n^{\frac{n+r}{2}}$.
On va utiliser la formule (4.30) dans ce qui suit avec $x = 2n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau > x)\,\theta(x) &= \mathbb{P}(\tau > x)\,\mathbb{E}\left[|X_x| \mid \tau > x\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X_x|\mathbb{1}_{\{\tau > x\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_x\mathbb{1}_{\{\tau > x, X_x > 0\}}\right] - \mathbb{E}\left[X_x\mathbb{1}_{\{\tau > x, X_x < 0\}}\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[X_x\mathbb{1}_{\{\tau > x, X_x > 0\}}\right] \\
&= 2\sum_{k>0, k \text{ pair}}^{x} k\mathbb{P}\left(X_x = k, \tau > x\right) \\
&= 4\sum_{\ell>0}^{n} \ell\mathbb{P}\left(X_{2n} = 2\ell, \tau > x\right) \\
&= 2\sum_{\ell>0}^{n} \ell\left(p_{2n-1,2\ell-1} - p_{2n-1,2\ell+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\sum_{\ell>0}^{n} \ell\left(C_{2n-1}^{n+\ell-1} - C_{2n-1}^{n+\ell}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} \ell\left(C_{2n-1}^{n+\ell-1} - C_{2n-1}^{n+\ell}\right) &= C_{2n-1}^{n} - C_{2n-1}^{n+1} + 2C_{2n-1}^{n+1} - 2C_{2n-1}^{n+2} + 3C_{2n-1}^{n+2} - 3C_{2n-1}^{n+3} \\
&+ ... + (n-1)C_{2n-1}^{2n-2} - (n-1)C_{2n-1}^{2n-1} + nC_{2n-1}^{2n-1} - nC_{2n-1}^{2n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} C_{2n-1}^{n+\ell} \\
&= 2^{2n-2}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\theta(x)\mathbb{P}\left(\tau > x\right) = 1 \tag{4.31}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) &= \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n+1} = 1)\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) \\
&+ \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n+1} = -1)\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) \\
&= \mathbb{P}_0(X_1 = 1, \tilde{T}_0 \leq x) + \mathbb{P}_0(X_1 = -1, \tilde{T}_0 \leq x) \\
&= \mathbb{P}_0(\tilde{T}_0 \leq x) \\
&= \mathbb{P}_0(\tau \leq x) \\
&= 1 - \mathbb{P}_0(\tau > x) \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

Et donc, en reprenant (4.31) et (4.32) on a bien la formule (4.29).
On s'intéresse maintenant au cas où $n+1$ est pair :

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \mathbb{1}_{X_n>0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{X_n+1}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{0}{\theta(x)} + 1\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1} \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{-X_n-1}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n<0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{1-X_n}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{0}{\theta(x)} + 1\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{X_n-1}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&= \mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{2}{\theta(x)} + \mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{X_n+1}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{1+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1} \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{-X_n-1}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{2}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{-2}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{1-X_n}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1} \leq x} \\
&+ \mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n\geq 3}\left\{\frac{X_n-1}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{2}{\theta(x)} + \mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n\geq 3}\left\{\frac{2X_n}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1} + \mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n\leq -3}\left\{\frac{-2X_n}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1} + \mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=-1}\left\{\frac{2}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{-2}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\mathbb{1}_{A_n \leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x} \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1} \leq x} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1} \leq x} \mid \mathcal{F}_n\right]
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}\{X_{n+1}=X_n+1\}\cap\{X_n=-1\}\cap\{\Sigma_{n+1}\le x\} &= \{X_{n+1}=X_n+1\}\cap\{X_n=-1\}\cap\{\Sigma_n\le x\}\cap\{d_n-g_n\le x\}\\ &= \{X_{n+1}=X_n+1\}\cap\{X_n=-1\}\cap\{\Sigma_n\le x\}\cap\{n+1-g_n\le x\}\\ &= \{X_{n+1}=X_n+1\}\cap\{X_n=-1\}\cap\{\Sigma_n\le x\}\cap\{A_n\le x-1\}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\mid\mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\\ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\mid\mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\right]\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\ &+ \mathbb{1}_{X_n\ge 3}\left\{\frac{X_n}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\right]\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\ &+ \mathbb{1}_{X_n\le -3}\left\{\frac{-X_n}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\right]\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\ &+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_{-2}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\right]\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\ &= (1)+(2)+(3)+(4)\end{aligned}$$

Il faut remarquer que, comme précédemment :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{X_n\neq 0}&\left\{\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\ &= \mathbb{1}_{X_n\neq 0}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n\right)\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\end{aligned}$$

On peut appliquer le raisonnement ci-dessus dans (1) et (4). En effet, on a pour (1) :

$$\begin{aligned}(1) &= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\right]\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\ &= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n\right)\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\end{aligned}$$

et on peut appliquer le même raisonnement pour (4). On obtient donc que :

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right]=\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x} \tag{4.33}$$

A priori, on n'a pas exactement obtenu M_n car on a $\mathbb{1}_{A_n\le x-1}$ au lieu de $\mathbb{1}_{A_n\le x}$ mais ici, il est impossible que A_n soit égale à x. En effet, $A_n=n-g_n$ où n est impair et g_n est pair, donc A_n est impair. Etant donné que l'on a pris x pair, $\mathbb{1}_{A_n=x}=0$. On a donc bien obtenu M_n.
Enfin :

$$\forall n\ge 0,\ 0\le M_n\le\frac{n}{\theta(x)}+1 \tag{4.34}$$

et on a donc montré que $(M_n, n\ge 0)$ était une martingale positive.
Quant à la démonstration de la non uniforme intégrabilité de $(M_n, n\ge 0)$, elle est identique à celle qui a été réalisée pour les martingales $(M_n^{\varphi}, n\ge 0)$ et $\left(M_n^{h^+,h^-}, n\ge 0\right)$. □

2.i) Montrons que pour tout $y\le x$, sous Q^x, $Q^x\left(\Sigma_\infty>y\right)=1-\frac{\mathbb{P}(\tau>x)}{\mathbb{P}(\tau>y)}$.

Lemme 4.4. *Pour tout $y\le x$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[M_{T_y^A}\right]=1 \tag{4.35}$$

Démonstration du lemme 4.4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{T_y^A}\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{\frac{|X_{T_y^A}|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_{T_y^A}\right)\mathbb{1}_{A_{T_y^A}\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^A}\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{\frac{|X_{T_y^A}|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\mathbb{1}_{y\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^A}\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{|X_{T_y^A}|}{\theta(x)}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right] \\
&= \frac{\theta(y)}{\theta(x)} + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \tau > y\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \tau > y\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 > x - y\right)\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\tilde{T}_0 > x - y \mid X_y\right]\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tilde{T}_0>x-y}\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Grâce à ce lemme, on peut montrer le point 2.i du Théorème 1.3.
En effet, si on pose $T_y^\Sigma := \inf\{n \geq 0, \Sigma_n > y\}$:

$$\begin{aligned}
Q^x\left(\Sigma_\infty > y\right) &= Q^x\left(T_y^\Sigma < \infty\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_y^\Sigma<\infty} M_{T_y^\Sigma}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_y^\Sigma<\infty}\left\{\frac{|X_{T_y^\Sigma}|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_{T_y^\Sigma}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_{T_y^\Sigma}\right)\mathbb{1}_{A_{T_y^\Sigma}\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^\Sigma}\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{0+1\}\,\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^\Sigma}}\leq x\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\Sigma_{T_y^\Sigma} \leq x\right]
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma_{T_y^\Sigma} \leq x\right\} &= \left\{\Sigma_{T_y^A} \leq x\right\} \cap \left\{\theta_{T_y^A} \circ T_0 + y \leq x\right\},\ \left\{\Sigma_{T_y^A} \leq x\right\} \text{ étant un événement de probabilité 1} \\
&= \left\{\theta_{T_y^A} \circ T_0 + y \leq x\right\}
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
Q^x(\Sigma_\infty > y) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\theta_{T_y^A}\circ T_0 + y \le x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\theta_{T_y^A}\circ T_0 + y \le x} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Sigma_{X_{T_y^A}}\left[\mathbb{1}_{\tilde{T}_0 \le x-y}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left[\tilde{T}_0 \le x-y\right]\right]
\end{aligned}$$

et d'après la démonstration du lemme 4.4, on a :

$$Q^x(\Sigma_\infty > y) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > y)} \tag{4.36}$$

□

2.ii) Il est maintenant facile de terminer la démonstration du point 2.

Lemme 4.5. *Pour tout $n \ge 0$, on a :*

$$Q^x(\Sigma_n \le x) = 1 \tag{4.37}$$

Démonstration du lemme 4.5. D'après la définition de la probabilité Q^x :

$$\begin{aligned}
Q^x(\Sigma_n \le x) &= \lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\Sigma_n \le x, \Sigma_p \le x)}{\mathbb{P}(\Sigma_p \le x)} \\
&= \lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\Sigma_p \le x)}{\mathbb{P}(\Sigma_p \le x)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

3) On va étudier le processus $(A_n, n \ge 0)$ sous Q^x.
3.i) Montrons que $A_\infty = \infty$ p.s.

Lemme 4.6. *Pour tout $n \ge 0$ et tout $k \ge 0$:*

$$\mathbb{P}(A_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(A_{2n+1} = 2k+1) = C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{4.38}$$

Démonstration du lemme 4.6. D'après [F1] pp.79, "Arcsin law for last visit" :

$$\mathbb{P}(g_{2n} = 2k) = C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{4.39}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{2n} = 2k) &= \mathbb{P}(2n - g_{2n} = 2k) \\
&= \mathbb{P}(g_{2n} = 2n - 2k) \\
&= C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{2n+1} = 2k+1) &= \mathbb{P}(2n+1 - g_{2n+1} = 2k+1) \qquad \text{, comme } g_{2n} = g_{2n+1} \\
&= \mathbb{P}(g_{2n} = 2n - 2k)
\end{aligned}$$

□

Pour montrer les points 2.iv.d et 2.iv.e, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.7. *Pour tout p, on a :*

$$Q^x(g > p \mid \mathcal{F}_p) = \mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_p\right)\frac{1}{M_p} \tag{4.40}$$

Démonstration du lemme 4.7. Pour tout $\Lambda_p \in \mathcal{F}_p$, on a :

$$\begin{aligned}
Q^x\left(\{\Lambda_p\} \cap \{g > p\}\right) &= Q^x\left(\{\Lambda_p\} \cap \{T_0 \circ \theta_p < \infty\}\right) \\
&= Q^x\left(\{\Lambda_p\} \cap \left\{T_0^{(p)} \infty\right\}\right) \quad \text{où } T_0^{(p)} \text{ est le premier 0 après } p \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} M_{T_0^{(p)}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} \mathbb{1}_{\Sigma_{T_0^{(p)}} \leq x}\right] \quad \text{comme } \left\{\Sigma_{T_0^{(p)}} \leq x\right\} = \left\{\left(\Sigma_{g_p} \vee \{A_p + T_0 \circ \theta_p\}\right) \leq x\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} \mathbb{1}_{\Sigma_{g_p} \leq x} \mathbb{E}_{X_p}\left[\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right]\right] \quad \text{il est clair que } \Sigma_{g_p} = \Sigma_p \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} \mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x} \frac{\mathbb{P}_{X_p}\left[\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right]}{M_p} M_p\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} \mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x} \frac{\mathbb{P}_{X_p}\left[\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right]}{M_p}\right] \quad \text{sous } Q^x\text{, } \Sigma_p \leq x \text{ est une événement de probabilité 1} \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} \frac{\mathbb{P}_{X_p}\left[\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right]}{M_p}\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien :

$$Q^x\left(g > p \mid \mathcal{F}_p\right) = \mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right) \frac{1}{M_p} \tag{4.41}$$

□

D'après le lemme 4.7 :

$$\begin{aligned}
Q^x(g > p) &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{g>p} \mid \mathcal{F}_p\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right) \frac{1}{M_p}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right) \mid \mathcal{A}_p\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{A_p}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right) \mid \tau > A_p\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_p \leq x}\left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > A_p)}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{p \wedge x} \mathbb{P}(A_p = 2k)\left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right), \text{ pour } p = 2l. \text{ Le calcul est identique si } p = 2l+1 \text{ (cf. lemme 4.6)} \\
&= \sum_{k=1}^{p \wedge x} C_{2l-2k}^{l-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^l \left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right) \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

on a donc la loi de g sous Q^x. Montrons que g est fini p.s. sous cette même probabilité.
D'après la démonstration ci-dessus on a :

$$\begin{aligned}
Q^x(g > p) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_p \leq x}\left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > A_p)}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_p} \leq x\right] \text{,or sous } \mathbb{P}\text{, } A_p \text{ tend vers l'infini p.s.}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
Q^x(g = \infty) &= \lim_{p \to \infty} Q^x(g > p) \\
&\leq \lim_{p \to \infty} \mathbb{P}(A_p \leq x) = 0
\end{aligned}$$

□

Remarquons que pour démontrer le résultat annoncé, on a du montrer le point 2.iii.(cf formule 4.42).

3.ii.a) Montrons que $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ a même loi sous $\mathbb{P}$ et sous Q^x. En effet, d'après la définition de la probabilité

Q^x, pour toute fonctionnelle F on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) \mathbb{E}\left[M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \quad , \mathbb{E}\left[M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right] = \mathbb{E}\left[M_{T_y^A}\right] = 1, \text{ cf. lemme 4.4} \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right]
\end{aligned}$$

□

b) On va maintenant prouver que $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ et $X_{T_y^A}$ sont indépendants sous $\mathbb{P}$ et sous Q^x :
Soit G une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) G\left(X_{T_y^A}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \text{ , sous } \mathbb{P},\ X_{T_y^A} \text{ indépendant de } A_{T_y^A}, \text{ cf. [ALR].} \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] \mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A}\right] \mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \quad \text{d'après le point 2.iv.a} \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] \mathbb{E}^{Q^x}\left[G\left(X_{T_y^A}\right)\right]
\end{aligned}$$

□

c) Cherchons maintenant la loi de $X_{T_y^A}$ sous Q^x. On utilise les mêmes notations que dans les points précédents.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^x}\left[G\left(X_{T_y^A}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G\left(X_y\right)\left\{\frac{|X_y|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mid \tau > y\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[G\left(X_y\right)\left\{\frac{|X_y|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mid \tau > y\right] \\
&= \sum_k G(k)\left\{\frac{|k|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_k\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mathbb{P}\left(X_y = k \mid \tau > y\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de $X_{T_y^A}$ sous Q^x vérifie :

$$\mathbb{P}\left(X_{T_y^A} = k\right) = \left\{\frac{|k|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_k\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mathbb{P}\left(X_y = k \mid \tau > y\right) \tag{4.43}$$

(La quantité $\mathbb{P}\left(X_y = k \mid \tau > y\right)$ est explicite et donnée dans [F1] pp. 77). □

d) On va maintenant calculer $Q^x\left(q > T_y^A\right)$, ce qui nous permet de démontrer le point 2.iv.e.

$$\begin{aligned}
Q^x\left(g > T_y^A\right) &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{g > T_y^A} \mid \mathcal{F}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \frac{1}{M_{T_y^A}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \tau > y\right] \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

□

e) Prouvons maintenant l'indépendance de $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ et $\left\{g > T_y^A\right\}$ sous Q^x.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\mathbb{1}_{g>T_y^A}\right] &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{g>T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\frac{1}{M_{T_y^A}}\right] \quad \text{, d'après (4.44)} \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\right] \text{, d'après [ALR]} \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)M_{T_y^A}\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\right] \text{, d'après le point a et (4.44)} \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right]Q^x\left(g > T_y^A\right) \text{, d'après le point a et (4.44)}
\end{aligned}$$

□

4) Etudions le processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^x.
4.i) Commençons par étudier la loi du processus $(X_n, n \geq g)$.
Rappelons le lemme 3.4 :

Sous $\mathbb{P}_1$, conditionnellement à $\{T_p \leq T_0\}$, la loi de $(X_n, 0 \leq n \leq T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.

Lemme 4.8. *Sous Q_1^x, conditionnellement à $\{T_0 = \infty\}$, la loi de $(X_n, 0 \geq n)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.*

Démonstration du lemme 4.8. Soit G une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
Q_1^x\left(G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0\right) &= \frac{Q_1^x\left(G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\right)}{Q_1^x\left(T_p < T_0\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}M_{T_0}\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}M_{T_0}\right]} \text{, or } M_{T_0} = \mathbb{1}_{\Sigma_{T_0}\leq x} \\
&= \frac{\mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_0}\leq x}\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_0}\leq x}\right]} \\
&= \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0, \Sigma_{T_0} \leq x\right]
\end{aligned}$$

Si on passe à la limite quand p tend vers ∞ :

$$\begin{aligned}
Q_1^x\left(G\left(X_1,...,X_n\right) \mid T_0 = \infty\right) &= \lim_{p\to\infty} Q_1^x\left(G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0\right) \\
&= \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0, \Sigma_{T_0} \leq x\right] \\
&= \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right) \mid T_0 = \infty\right]
\end{aligned}$$

□

Soit F une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$ et posons $\Gamma^+ = \{X_n > 0, n > g\}$,$\Gamma^- = \{X_n < 0, n > g\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{g+1},...,X_{g+n}\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mathbb{1}_{g=k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=1}\right] \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=-1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right) \mid g=k, X_{k+1}=1\right]Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=1\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right) \mid g=k, X_{k+1}=-1\right]Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=-1\right) \\
&= \mathbb{E}_1^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right) \mid T_0=\infty\right]\sum_{k=0}^{\infty}Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=1\right) \\
&+ \mathbb{E}_{-1}^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right) \mid T_0=\infty\right]\sum_{k=0}^{\infty}Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=-1\right) \\
&= \mathbb{E}_1^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right) \mid T_0=\infty\right]Q_0^x\left(\Gamma^+\right) \\
&+ \mathbb{E}_{-1}^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right) \mid T_0=\infty\right]Q_0^x\left(\Gamma^-\right)
\end{aligned}$$

Il reste à voir que les événements $\Gamma^+ = \{X_n > 0, n > g\}$ et $\Gamma^- = \{X_n < 0, n > g\}$ sont symétriques sous Q_0^x et sont donc chacun de probabilité $\frac{1}{2}$.

Lemme 4.9.

$$Q_0^x\left(\Gamma^+\right) = Q_0^x\left(\Gamma^+\right) = \frac{1}{2} \tag{4.45}$$

Démonstration du lemme 4.9. Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned}
Q_0^x\left(\Gamma^+\right) &= \lim_{n\to\infty} Q_0^x\left(X_n > 0\right) \\
Q_0^x\left(\Gamma^-\right) &= \lim_{n\to\infty} Q_0^x\left(X_n < 0\right)
\end{aligned}$$

Par définition de Q^x :

$$\begin{aligned}
Q_0^x\left(X_n > 0\right) &= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n>0}M_n\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\right]
\end{aligned}$$

Grâce à la symétrie de la marche aléatoire sous $\mathbb{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
Q_0^x\left(X_n > 0\right) &= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n<0}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\right] \\
&= Q_0^x\left(X_n < 0\right)
\end{aligned}$$

On a vu que sous Q^x, g est fini p.s., par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} Q^x\left(X_n = 0\right) = 0$$

Comme :

$$Q_0^x\left(X_n > 0\right) + Q_0^x\left(X_n < 0\right) + Q_0^x\left(X_n = 0\right) = 2Q_0^x\left(X_n > 0\right) + Q_0^x\left(X_n = 0\right) = 1$$

en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$Q_0^x\left(\Gamma^+\right) + Q_0^x\left(\Gamma^-\right) = 2Q_0^x\left(\Gamma^+\right) = 1$$

$\square$

4.ii) On rappelle les notations suivantes :

$$\gamma_n := |\{k \leq n, X_k = 0\}| \tag{4.46}$$

$$\gamma_\infty := \lim_{n\to\infty} \gamma_n \tag{4.47}$$

$$\tau_1 := T_0 \tag{4.48}$$

$$\forall n \geq 2,\ \tau_n := \inf\{k \geq \tau_{n-1},\ X_k = 0\} \tag{4.49}$$

Il reste à démontrer que conditionnellement à $\gamma_\infty = l$, $\{|X_u|, u \geq g\}$ est une marche aléatoire standard arrêtée à τ_l et conditionnée par $\Sigma_{\tau_l} \geq x$.
Soit F, une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l} \mid \gamma_\infty = l\right] &= \frac{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\mathbb{1}_{\gamma_\infty=l}\right]}{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\gamma_\infty = l\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\infty}\right] - \mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}\right]}{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\tau_l<\infty}\mathbb{1}_{\tau_{l+1}=\infty}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\infty}\right] - \mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}\right]}{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\tau_l<\infty}\right] - \mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\tau_{l+1}<\infty}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\infty}M_{\tau_l}\right] - \mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}M_{\tau_{l+1}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\tau_l<\infty}M_{\tau_l}\right] - \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\tau_{l+1}<\infty}M_{\tau_{l+1}}\right]}
\end{aligned}$$

Comme sous $\mathbb{P}$, $\{\tau_l < \infty\}$ est de probabilité 1 :

$$\begin{aligned}
M_{\tau_l} - M_{\tau_{l+1}} &= \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x} - \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_{l+1}}\leq x} \\
&= \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\left(1 - \mathbb{1}_{\tau_{l+1}-\tau_l\leq x}\right) \\
&= \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\mathbb{1}_{\tau_{l+1}-\tau_l > x}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l} \mid \gamma_\infty = l\right] &= \frac{\mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\left(M_{\tau_l} - M_{\tau_{l+1}}\right)\right]}{\mathbb{E}_0\left[M_{\tau_l} - M_{\tau_{l+1}}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{\{n\leq\tau_l,\Sigma_{\tau_l}\leq x,\tau_{l+1}-\tau_l>x\}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{\Sigma_{\tau_l}\leq x,\tau_{l+1}-\tau_l>x\}}\right]},\ \tau_{l+1}-\tau_l \text{ indépendant de } \mathcal{F}_{\tau_l} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l,\Sigma_{\tau_l}\leq x}\right]\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{\tau_{l+1}-\tau_l>x\}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\right]\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\tau_{l+1}-\tau_l>x}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{\{n\leq\tau_l,\Sigma_{\tau_l}\leq x\}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\right]} \\
&= \mathbb{E}_0\left[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l} \mid \Sigma_{\tau_l} \leq x\right]
\end{aligned}$$

□

Références

[ALR] C. Ackermann, G. Lorang et B. Roynette, *Independance of time and position for a random walk*, Revista Matematica Iberoamericana **20** (2004), no. 3, pp.915-917.

[F1] Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol.1, 1950.

[F2] Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol.2, 1966-1971.

[LG] J.F. LeGall, *Une Approche Elémentaire des Théorèmes de Décomposition de Williams* , Lecture Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités XX, 1984-1985, pp.447-464.

[P] J.W. Pitman, *One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process*, Advances in Appl. Probabality 7, 1975, pp. 242-242.

[RVY II] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor. *Limiting Laws associated with Brownian Motion perturbed by Its Maximum, Minimum and Local Time*, Studia sci. Hungarica Mathematica (2006).

[RVY VII] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor. *Brownian penalisations related to excursion lengths*, Article soumis aux Annales de l'Institut Henri Poincaré en octobre 2006.